CÁLCULO III **Matemáticas e Informática** **Curso 2018/2019**	1^{er} Apellido: ______ 2º Apellido: ______	**30/10/2018** Tiempo: **2h**
Dpto. Matemática Aplicada ETSI Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ______ Número de matrícula:	**Calificación:**

PRIMER PARCIAL

1. **(2 puntos)** Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ el recinto acotado limitado por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$, y $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{si } y = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ x^2 + y & , \text{en otro caso} \end{cases}$$

Estudia si la función f es integrable sobre S y, en caso afirmativo, calcula el valor de la integral.

2. **(2 puntos)** Una placa metálica tiene la forma de la corona circular comprendida entre las circunferencias centradas en el origen de radios 2 y 3. Calcula su masa si la densidad puntual viene dada por la función $\delta(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

3. **(2 puntos)** Halla el volumen del recinto acotado comprendido entre en cono $x^2 + y^2 = z^2$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 2 - z$ en el semiespacio $z \geq 0$.

4. **(2 puntos)** Calcula la integral de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre el recinto limitado por la superficie $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z\sqrt{x^2 + y^2}$.

5. **(2 puntos)** Una cuerda tiene la forma de la curva parametrizada por $\alpha(t) = (1 + \sin t,\ t,\ 1 + \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

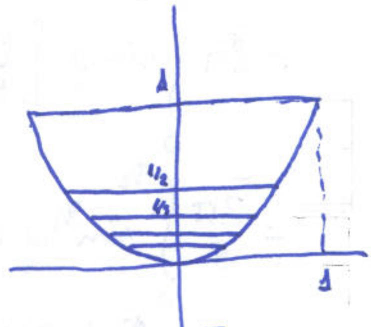
   (a) Calcula su longitud.

   (b) Calcula su masa si su densidad puntual viene dada por la función $\delta(x,y,z) = xz + y$.

   (c) ¿Cuál es el valor medio de la densidad sobre la curva?

SOLUCIÓN

(1) El conjunto de discontinuidades de f en S es la unión numerable de los segmentos intersección de S con las rectas $y = \frac{1}{n}$, luego tiene medida nula y, por el teorema de Lebesgue, la función f es integrable sobre S.

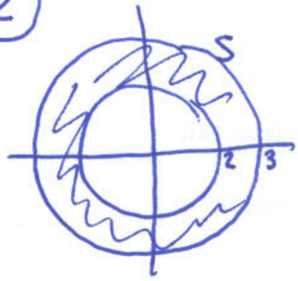


El valor de la integral es:

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S (x^2+y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2+y)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=1} dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{2} - \frac{3x^4}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} - \frac{3x^5}{10}\right]_{x=-1}^{x=1} = \boxed{\frac{16}{15}}$$

(2)

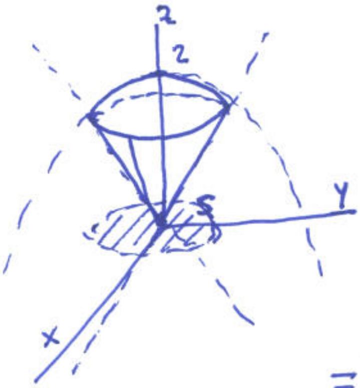


$$m=\iint_S \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 \frac{1}{\rho^3}\cdot\rho\, d\rho = 2\pi\int_2^3 \frac{d\rho}{\rho^2} =$$

$$= 2\pi\left[\frac{-1}{\rho}\right]_{\rho=2}^{\rho=3} = 2\pi\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

(3)

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=z^2 \\ x^2+y^2=2-z \end{array}\right\} \Rightarrow z^2=2-z \Rightarrow z^2+z-2=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2 \\ z=1 \Rightarrow x^2+y^2=1 \end{array}\right.$$



$$\Omega=\{(x,y,z):\underbrace{x^2+y^2\le 1}_{S},\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\}$$

$$V(\Omega)=\iint_S\left[(2-x^2-y^2)-\sqrt{x^2+y^2}\right]dx\,dy =$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 (2-\rho^2-\rho)\rho\, d\rho = 2\pi\left[\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$$

(4)

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = z\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[\text{esféricas}]{} \rho^4=\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho=0\\ \rho=\sqrt{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}\end{array}\right.$$

Solo existe la superficie en $z\geq 0$, es decir, en $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}} \rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\rho =$$

$$=2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cdot\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}} d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1}{5}\sin\varphi\,(\sin\varphi\cdot\cos\varphi)^{5/2}d\varphi =$$

$$=\frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi/2}\sin^{7/2}\varphi\cdot\cos^{5/2}\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi}{5}\cdot\frac{1}{2}\beta\left(\frac{9}{4},\frac{7}{4}\right) = \frac{\pi}{5}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(4)} =$$

$$=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\Gamma(1/4)\cdot\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{\pi}{128}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi^2\cdot\sqrt{2}}{128}}$$

⑤ $\alpha(t) = (1+\sin t,\, t,\, 1+\cos t)\ ,\ 0 \leq t \leq 2\pi$

$\alpha'(t) = (\cos t,\, 1,\, -\sin t)\ ;\ \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + 1 + \sin^2 t} = \sqrt{2}$

a) $\text{Longitud} = \ell = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\cdot dt = \boxed{2\sqrt{2}\,\pi}$

b) $\text{Masa} = m = \int_0^{2\pi} \delta(\alpha(t))\cdot\|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \left[(1+\sin t)(1+\cos t) + t\right]\sqrt{2}\, dt =$

$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1 + \sin t + \cos t + \sin t\cos t + t)\, dt =$

$= \sqrt{2}\left[t - \cos t + \sin t + \frac{\sin^2 t}{2} + \frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \boxed{\sqrt{2}\left(2\pi + \frac{4\pi^2}{2}\right)} =$

$= \boxed{2\sqrt{2}\,\pi\,(1+\pi)}$

c) $VM = \frac{m}{\ell} = \frac{2\sqrt{2}\,\pi\,(1+\pi)}{2\sqrt{2}\,\pi} = \boxed{1+\pi}$